

原始-对偶模型的牛顿迭代原理与图像恢复

李旭超¹, 宋 博²

(1. 赤峰学院计算机与信息工程学院, 内蒙古赤峰 024000; 2. 江苏师范大学电气工程及自动化学院, 江苏徐州 221116)

摘 要: 针对非可微有界变差函数容易在图像恢复过程产生阶梯效应, 提出一种二阶可微的原始-对偶模型及牛顿迭代算法. 分析伪 Huber 函数的特性, 运用 Fenchel 变换, 将原始模型转化为原始-对偶模型, 然后提出原始与对偶变量不同步长更新策略的牛顿迭代算法, 并给出广义交叉验证准则确定权重. 利用点扩散函数和高斯噪声对合成与真实图像进行模糊, 将本文方法与快速傅里叶变换算法、快速收缩阈值算法、交替投影算法和拟牛顿算法进行实验对比, 仿真表明, 本文算法能保护图像的边缘, 抑制阶梯效应, 取得较小的相对误差、偏差, 较高的峰值信噪比、相似性测度和良好的视觉效果.

关键词: 原始-对偶模型; 图像恢复; 能量泛函; 算法收敛

中图分类号: TP302.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)10-1984-10

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.10.016

Newton Iterative Principle of Primal-Dual Model and Image Restoration

LI Xu-chao¹, SONG Bo²

(1. College of Computer and Information Engineering, Chifeng University, Chifeng, Mongola 024000, China;

2. College of Electrical Engineering and Automation, Jiangsu Normal University, Xuzhou, Jiangsu 221116, China)

Abstract: For non-differential characteristics and easily producing stair effect of total variation in image restoration, the paper presents a second order differential primal-dual model and Newton iterative algorithm. The characteristics of pseudo Huber function are analyzed, primal model is converted into primal-dual model resort to Fenchel transform, Newton iterative algorithm based on the different step length update schemes of primal and dual variables are proposed, and the generalized cross validation principle is given to determine the weight. Synthesized and real images are blurred by point spread function and Gaussian noise, the comparison experiments among the proposed scheme with fast Fourier transform algorithm, fast shrinkage-thresholding algorithm, alternating projection algorithm and quasi-Newton algorithm are carried out. Simulation results show the proposed algorithm can protect image edges, alleviate stair effect, and achieve lower relative error and deviation, higher peak signal to noise ratio and structural similarity index measure, and better visual effect.

Key words: primal-dual model; image restoration; energy functional; algorithm convergence

1 引言

在宇航成像, 放射显微镜成像, 压缩感知^[1,2]中, 采样图像可用第一类 Fredholm 积分方程^[3]来描述, 由于方程的不适定性, 很难获得理想图像. 为获得理想图像, 最好的办法是建立正则化能量泛函^[4]. 在众多正则化模型中, 研究有界变差函数作为正则项及求解算法异常活跃^[5]. 如 ROF (Rudin-Osher-Fatemi) 模型^[6], 自适应 ROF 模型和半二次 ROF 模型等^[3]. 但 ROF 模型不可微, 使得能量泛函求解十分困难, 而且容易在平稳区域产生阶梯效应. 为克服此缺点, 研究有界变差函数作为正则项主要有三个发展方向: 一是基于原始模型设计求解算法. 利用光滑函数逼近有界变差函数, 设计一阶求解算法, 如最速下

降算法, 不动点算法^[7], 但算法收敛较慢. 为加快算法收敛, 利用能量泛函的梯度和海森矩阵, 设计二阶求解算法, 如牛顿迭代算法、拟牛顿投影算法^[8]等, 但是, 维数较高的海森矩阵一般不具有特殊结构, 导致算法收敛缓慢. 为克服该弱点, 直接利用次微分^[9]计算正则项, 如迭代软阈值算法^[10], 快速迭代软阈值算法^[4]等, 但图像恢复质量不太理想; 二是基于对偶模型设计求解算法. 对正则项进行 Fenchel 变换, 将原始模型转化为对偶模型. 如半隐梯度下降算法^[11], 梯度投影算法^[3], 只要选取适当的步长, 算法较快地收敛到最优解, 对受高斯、泊松和拉普拉斯噪声模糊的图像进行恢复, 定量评价指标优于原始模型^[12]; 三是基于原始-对偶模型设计求解算法. 如原始与对偶变量步长更新相同、不同^[13]和自适应更新

的一阶 Primal-Dual 算法^[14]. 为保证算法收敛, 文献[15]研究 Primal-Dual 算法步长更新准则, 此类算法恢复图像质量优于对偶模型, 但算法收敛速度是一阶的, 且解是次最优的.

为加快算法收敛, 获得最优解, 本文提出一种具有二次收敛速度的原始-对偶模型图像恢复算法. 在模型的建立上, 用自变量是有界变差的伪 Huber 函数描述正则项, 用 L_2 范数拟合保真项; 在模型的求解上, 首先论证正则项的梯度和海森矩阵幅值有限, 然后利用对偶变换, 将模型转化为极小-极大问题; 在算法的设计上, 提出原始与对偶变量不同步长更新策略的 Primal-Dual 牛顿迭代算法, 并证明收敛性; 在权重的确定上, 给出广义交叉验证准则; 在算法验证上, 选用模拟与真实图像, 将本文算法与快速傅立叶变换算法^[3]、拟牛顿迭代算法^[16]、文献[4]算法和交替投影迭代算法^[5]进行对比, 验证算法的有效性.

2 图像恢复能量泛函正则化模型

理想图像 \mathbf{x} 同时受 \mathbf{A} 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 影响而降质, 表达式为

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

式中, \mathbf{g} 是降质图像, \mathbf{A} 为模糊矩阵, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是高斯噪声. 为获得 \mathbf{x} , 最小化正则化模型表达式为

$$\mathbf{x}_* = \arg \min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) \quad (2)$$

式中, $E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{g}\|_{L_2}^2 + \lambda\Phi(\mathbf{D}\mathbf{x})$, $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{g}\|_{L_2}^2$ 为拟合项, $\Phi(\mathbf{D}\mathbf{x})$ 为正则项, \mathbf{D} 是线性算子, $\Phi(\cdot)$ 为函数, λ 是权重. 若 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, 式(2)为降噪问题^[17], 若 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$, 式(2)为去模糊问题.

若 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 可逆, 算子 \mathbf{A} 和 \mathbf{D} 满足条件

$$\ker(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \cap \ker(\mathbf{D}^T \mathbf{D}) = \{\mathbf{0}\} \quad (3)$$

式中, $\ker(\cdot)$ 为核空间. 若 $\Phi(\mathbf{x})$ 是严格凸非递减函数, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = +\infty$, 满足线性增长条件, 由变分原理^[18], 式(2)的解存在且唯一. 若 $\Phi(\mathbf{x})$ 为非可微的有界变差函数, 无法应用牛顿迭代算法. 虽然可利用 Huber 函数^[19]作为正则项, 但算法只具有线性收敛速度.

2.1 伪 Huber 函数的特性

伪 Huber 函数^[19]表达式为

$$\Phi(x) = \beta \int_{\Omega} \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{\beta^2}} - 1 \right) dx \quad (4)$$

式中, $\beta > 0$ 的常数, 随着 $\beta \rightarrow 0$, 式(4)逼近有界变差函数, 具有二阶导数.

定理 1 伪 Huber 函数的梯度有界, 表示为

$$-1 \leq [\nabla \Phi(\mathbf{x})]_i \leq 1 \quad (5)$$

式中, $i = 1, 2, \dots, m$, ∇ 表示梯度.

证明 对式(4)求偏导数有

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = \text{diag} \left[\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \beta^2}}, \dots, \frac{x_m}{\sqrt{x_m^2 + \beta^2}} \right] \quad (6)$$

$[\nabla \Phi(\mathbf{x})]_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + \beta^2}}$, $[\nabla \Phi(\mathbf{x})]_i$ 是递增的奇函数, 因为 $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} [\nabla \Phi(\mathbf{x})]_i = -1$, $\lim_{x_i \rightarrow +\infty} [\nabla \Phi(\mathbf{x})]_i = 1$, 所以 $-1 \leq [\nabla \Phi(\mathbf{x})]_i \leq 1$. 证毕.

定理 2 伪 Huber 函数的海森矩阵有界, 即

$$0 < [\nabla^2 \Phi(\mathbf{x})]_{ii} \leq 1/\beta \quad (7)$$

且式(7)是 Lipschitz 连续的, 表达式为

$$\|\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) - \nabla^2 \Phi(\mathbf{y})\|_{L_2}^2 \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{L_2}^2 \quad (8)$$

式中, $L > 0$ 的常数.

证明 对式(6)求偏导有

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = \text{diag} \left[\frac{\beta^2}{[x_1^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}}, \dots, \frac{\beta^2}{[x_m^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (9)$$

$[\nabla^2 \Phi(\mathbf{x})]_{ii} = \frac{\beta^2}{[x_i^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}}$, 因为 $[\nabla^2 \Phi(\mathbf{x})]_{ii}$ 是偶函数, $\lim_{x_i \rightarrow \infty} [\nabla^2 \Phi(\mathbf{x})]_{ii} = 0$, $\lim_{x_i \rightarrow 0} [\nabla^2 \Phi(\mathbf{x})]_{ii} = 1/\beta$, 因此, 式(7)成立.

$$\begin{aligned} & \|\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) - \nabla^2 \Phi(\mathbf{y})\|_{L_2}^2 \\ & \leq \int_{B_1(0)} \left\| \frac{d \nabla^2 \Phi(\mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{ds} \right\|_{L_2}^2 ds \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $B_1(0)$ 表示以 0 为圆心, 半径为 1 的球, $\frac{d \nabla^2 \Phi(\mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{ds}$ 为对角阵, 相应元素为

$$\left[\frac{d \nabla^2 \Phi(\mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{ds} \right]_{ii} = (x_i - y_i) p_i \quad (11)$$

式中, $p_i = \frac{-3(sx_i + (1-s)y_i)}{\beta^3 \left(1 + \frac{(sx_i + (1-s)y_i)^2}{\beta^2} \right)^{\frac{5}{2}}}$. 对式(11)两边

取绝对值, 则有

$$\left| \left[\frac{d \nabla^2 \Phi(\mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{ds} \right]_{ii} \right| = |x_i - y_i| |p_i| \quad (12)$$

式中, $|p_i|$ 在 $(\beta - 2y_i)/[2(x_i - y_i)]$ 处具有最大值, 经不等式放大, 则有

$$|p_i| < 1/\beta^2 \quad (13)$$

取 $L = 1/\beta^2$, 将式(13)代入式(12), 则有

$$\left| \left[\frac{d \nabla^2 \Phi(\mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{ds} \right]_{ii} \right| \leq L |x_i - y_i| \quad (14)$$

将式(14)代入式(10), 则有式(8). 证毕.

2.2 原始最小化问题转化为原始-对偶极值原理

由 Fenchel 变换^[3,18], $\Phi(\mathbf{D}\mathbf{x})$ 的共轭函数为

$$\Phi^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in C} \{ (\mathbf{D}\mathbf{x})^T \mathbf{y} - \Phi(\mathbf{D}\mathbf{x}) \} \quad (15)$$

式中, C 是 \mathbf{x} 在凸集 $C \subset R^d$ 上的定义域, $\mathbf{D}\mathbf{x} = (\mathbf{D}_x \mathbf{x}, \mathbf{D}_y \mathbf{x})$. 由 Fenchel 变换, 式(15)表示为

$$\Phi(\mathbf{D}\mathbf{x}) = (\mathbf{D}\mathbf{x})^T \mathbf{y} + \Phi^*(\mathbf{y}) \quad (16)$$

令 $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, 将 $\Phi(\mathbf{D}\mathbf{x})$ 表示成原始-对偶模型, 表达式为

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{C}^*} \{ \langle \mathbf{x}, \mathbf{D}_x^* \mathbf{u} + \mathbf{D}_y^* \mathbf{v} \rangle - \langle \Phi^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{1} \rangle \} \quad (17)$$

式中, \mathbf{D}_x^* 和 \mathbf{D}_y^* 分别是 \mathbf{D}_x 和 \mathbf{D}_y 的伴随算子, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为内积. 将式(17)代入式(2), 则有

$$(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*, \mathbf{x}_*) = \min_x \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) \quad (18)$$

式中, $E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{g}\|_{L_2}^2 + \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

2.3 原始-对偶模型极值的牛顿迭代原理

根据一阶 KKT(Karush-Kuhn-Tucker) 条件^[20], 式(18)关于 \mathbf{y} 和 \mathbf{x} 一阶导数表达式为

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^* \mathbf{x} \\ \mathbf{D}_y^* \mathbf{x} \end{bmatrix} - \frac{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^T}{\varphi'((\mathbf{D}_x \mathbf{x})^2 + (\mathbf{D}_y \mathbf{x})^2)} \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{g}) + \lambda(\mathbf{D}_x^* \mathbf{u} + \mathbf{D}_y^* \mathbf{v}) \quad (20)$$

根据式(19)和(20), 式(18)的梯度为

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})\mathbf{u} - \mathbf{D}_x \mathbf{x} \\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})\mathbf{v} - \mathbf{D}_y \mathbf{x} \\ \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{g}) + \lambda(\mathbf{D}_x^* \mathbf{u} + \mathbf{D}_y^* \mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{式中, } \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varphi'((\mathbf{D}_x \mathbf{x})^2 + (\mathbf{D}_y \mathbf{x})^2)}$$

根据二阶 KKT 条件, 式(21)关于 (\mathbf{y}, \mathbf{x}) 的偏导数为

$$\mathbf{H}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}'(\mathbf{x})\mathbf{u} - \mathbf{D}_x \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) & \mathbf{\Gamma}'(\mathbf{x})\mathbf{v} - \mathbf{D}_y \\ \lambda \mathbf{D}_x^* & \lambda \mathbf{D}_y^* & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (22)$$

由式(21)、(22), 应用牛顿迭代法求式(18)最优增量解, 表达式为

$$\mathbf{H}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{x} \end{bmatrix} = -\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (23)$$

对式(23)进行块化简, 将 $\mathbf{H}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 转化为块上三角矩阵, 式(23)转化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & -\mathbf{a}_{11}\mathbf{D}_x - \mathbf{a}_{12}\mathbf{D}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) & -\mathbf{a}_{21}\mathbf{D}_x - \mathbf{a}_{22}\mathbf{D}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{v} \\ -\Delta \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_1 \\ -\mathbf{g}_2 \\ r \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中, 令 $\mathbf{B}_1 = \frac{2\Phi''(\mathbf{x})(\mathbf{D}_x \mathbf{x})}{\Phi'(\mathbf{x})^2}$, $\mathbf{B}_2 = \frac{2\Phi''(\mathbf{x})(\mathbf{D}_y \mathbf{x})}{\Phi'(\mathbf{x})^2}$, $\mathbf{a} =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{1} + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}) & \text{diag}(\mathbf{B}_2 \mathbf{u}) \\ \text{diag}(\mathbf{B}_1 \mathbf{v}) & \text{diag}(\mathbf{1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Psi} =$$

$[\mathbf{D}_x^*, \mathbf{D}_y^*] \text{diag}(\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}), \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x})) \mathbf{a} [\mathbf{D}_x \ \mathbf{D}_y]^T, \mathbf{r} = \mathbf{A}^T(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{x}) - [\mathbf{D}_x^*, \mathbf{D}_y^*] \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}) [\mathbf{D}_x \ \mathbf{D}_y]^T \cdot \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}$ 都是对角矩阵, 若 \mathbf{D} 是一阶差分矩阵, 那么 $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y$ 都是二对角稀疏矩阵, $\Delta \mathbf{u}$ 和 $\Delta \mathbf{v}$ 容易求解. 由于 $\boldsymbol{\Psi}$ 是对角矩阵, 对图像施加周期边界条件, 用快速傅里叶变换对角化 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, 使得 $\Delta \mathbf{x}$ 容易求解.

2.4 原始-对偶模型权重的确定

λ 确定主要有 L -曲线法、无偏预测风险估计器(UPRE)和广义交叉验证法(GCV)等^[3,7]. 从统计意义上, L -曲线法欠估 λ , UPRE 需已知噪声的方差, GCV 方法不需要知道噪声的方差, 但标准 GCV 方法, $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, 而式(2)中的 $\mathbf{D} \neq \mathbf{I}$. 为获得通用 GCV 准则, 则有

$$\lambda_* = \min_{\lambda} \text{GCV}(\lambda) = \min_{\lambda} \left\{ \frac{n \|\mathbf{(I - AA}_{\lambda}^+ \mathbf{A}^T)\mathbf{g}\|_{L_2}^2}{[\text{trace}(\mathbf{I - AA}_{\lambda}^+ \mathbf{A}^T)]^2} \right\} \quad (25)$$

式中, $\mathbf{A}_{\lambda}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}$ 表示伪逆矩阵, $\text{trace}(\cdot)$ 表示矩阵的迹.

2.5 原始-对偶模型的牛顿迭代算法

求解式(18)算法归结如下:

原始-对偶模型的牛顿迭代算法

- 1 Initialization $\lambda, t = 0, k = 0, \text{IM}, \text{EM}, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$
- 2 For $k = 1; \text{EM}$
- 3 Compute(21)and(22)
- 4 $\mathbf{G}_{k,0} = \mathbf{H}\mathbf{d}_{k,0} + \mathbf{G}_k, \mathbf{p}_0 = -\mathbf{G}_{k,0}, \sigma_0 = \|\mathbf{G}_{k,0}\|_{L_2}^2$
- 5 While $t < \text{IM}$ or $\gamma_t \leq c \|\mathbf{G}_{k,t}\|_{L_2}^2$
- 6 $\mathbf{h}_t = \mathbf{H}\mathbf{p}_t, \delta_t = \sigma_t / \langle \mathbf{p}_t, \mathbf{h}_t \rangle$
- 7 $\mathbf{d}_{k,t+1} = \mathbf{d}_{k,t} + \delta_t \mathbf{p}_t, \mathbf{d} = (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{x}), \mathbf{G}_{k,t+1} = \mathbf{G}_{k,t} + \delta_t \mathbf{h}_t, \gamma_t = \|\mathbf{H}\mathbf{d}_{k,t+1} - \mathbf{G}_{k,t+1}\|_{L_2}^2$
- 8 $\sigma_{t+1} = \|\mathbf{G}_{k,t+1}\|_{L_2}^2, \beta_t = \sigma_{t+1} / \sigma_t, \mathbf{p}_{t+1} = -\mathbf{G}_{k,t+1} + \beta_t \mathbf{p}_t$
- End
- 9 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \tau_k \Delta \mathbf{x}_k \quad (26)$
- 10 $\tau_k = |E(\mathbf{x}_k + \tau_k \Delta \mathbf{x}_k) - E(\mathbf{x}_k)| \leq \epsilon_0 \tau_k \Delta E(\mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{x}_k) \quad (27)$
- 11 $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \eta_k \Delta \mathbf{y}_k \quad (28)$
- 12 $\eta_k = \min_k \{ \max_{\eta_i} \{ \eta_i | 0 \leq \mathbf{y}_k + \eta_i \Delta \mathbf{y}_k \leq \mathbf{1}, 0 \leq \eta_i \leq 1 \} \} \quad (29)$
- 13 Update $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_k \Delta \mathbf{x}_k \\ \eta_k \Delta \mathbf{y}_k \end{bmatrix} \quad (30)$
- 14 $k = k + 1, t = t + 1$
- End

2.6 原始-对偶模型牛顿迭代算法收敛性分析

定理 3 设 $E(z)$ 二阶连续可微, $\forall z \in B_r(z_*) \subset \Omega, \forall \zeta \in \Omega$, 存在常数 $\theta > 0$, 使得

$$\zeta^T \mathbf{H}(z) \zeta \geq \theta \|\zeta\|_{L_2}^2 \quad (31)$$

式中, $z \in L(z_0), L(z_0)$ 为水平集^[18], 表达式为

$$L(z_0) = \{z | E(z) \leq E(z_0)\} \quad (32)$$

定理 4 令 $\mathbf{z}_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, $k = 1, 2, \dots, EM$, 若 $\{\mathbf{z}_k\}$ 是由牛顿迭代算法产生的序列, 式(18)存在聚点 \mathbf{z}_* , 那么 $\{\mathbf{z}_k\}$ 的聚点 \mathbf{z}_* 是式(18)的鞍点.

证明 下面证明式(27)从左边到右边成立. 因为采用 Armijo 规则搜索 τ_k , 所以 $\{E(\mathbf{x}_k)\}$ 是严格递减的, 表达式为

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}_k + \tau_k \Delta \mathbf{x}_k) - E(\mathbf{x}_k) &\leq \varepsilon_0 \tau_k \Delta E(\mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{x}_k) \\ &\leq \varepsilon_0 \tau_k \frac{\|\Delta \mathbf{x}_k\|_{L_2}^2}{M} < 0 \end{aligned} \quad (33)$$

令 $\tau_k = \rho^{l_k}$, $\rho \in (0, 1)$, l_k 是非负整数. 由式(32), $\{E(\mathbf{x}_k)\}$ 是递减的且下有界, 则式(33)的右边趋于零. 因此, 若存在整数 $N > 0$, 使得 $l_k < N$, 对子序列 $\{1, 2, \dots\}$ 的所有 k , 使得 $\Delta \mathbf{x}_k \rightarrow 0$;

用反证法证明式(27)从右边到左边成立. 假设存在子序列 $\omega \subset \{1, 2, \dots\}$, $l_k \rightarrow \infty$, $k \in \omega$, 对于足够大的 k , 使得当前迭代解 $\mathbf{x}_k + \tau_k \Delta \mathbf{x}_k / \beta$ 不满足式(27), 那么

$$E(\mathbf{x}_k + \tau_k \Delta \mathbf{x}_k / \beta) - E(\mathbf{x}_k) > \varepsilon_0 \tau_k \Delta E(\mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{x}_k) / \beta \quad (34)$$

因为能量泛函是凸函数, 因此

$$E(\mathbf{x}_k + \tau_k \Delta \mathbf{x}_k / \beta) - E(\mathbf{x}_k) \leq \tau_k \Delta E(\mathbf{x}_k + \tau_k \Delta \mathbf{x}_k / \beta, \Delta \mathbf{x}_k) / \beta \quad (35)$$

由式(30)和式(31)可知

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \tau_k \nabla E(\mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{x}_k) / \beta &< \tau_k \nabla E(\mathbf{x}_k + \theta_k \tau_k \Delta \mathbf{x}_k / \beta, \Delta \mathbf{x}_k) / \beta \\ \nabla E(\mathbf{x}_k + \theta_k \tau_k \Delta \mathbf{x}_k / \beta, \Delta \mathbf{x}_k) - \nabla E(\mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{x}_k) &> \\ (\varepsilon_0 - 1) \nabla E(\mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{x}_k) &> 0 \end{aligned} \quad (36)$$

由式(32), 序列 $\{E(\mathbf{x}_k)\}$ 递减且下有界, 当 $l_k \rightarrow \infty$, $k \in \omega$, $\|\theta_k \tau_k \Delta \mathbf{x}_k / \beta\|_{L_2}^2 \rightarrow 0$, 式(36)即大于零又小于零, 矛盾, 故式(34)不成立. 因此采用 Armijo 规则更新步长, 原始变量的迭代解收敛.

由式(24)可知, 对偶变量的表达式为

$$\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{u} + \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}) [\mathbf{D}_x \mathbf{x} + \mathbf{a}_{11} \mathbf{D}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{a}_{12} \mathbf{D}_y \Delta \mathbf{x}] \quad (37)$$

$$\Delta \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}) [\mathbf{D}_y \mathbf{x} + \mathbf{a}_{21} \mathbf{D}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{a}_{22} \mathbf{D}_y \Delta \mathbf{x}] \quad (38)$$

由于 \mathbf{x}_k 收敛于最优解 \mathbf{x}_* , 那么 $\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0$, 式(37)的等价表达式为

$$\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{u} + \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_x \mathbf{x} \quad (39)$$

将式(39)表示成迭代形式, 表达式为

$$\eta_k \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{u} + \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_x \mathbf{x} \quad (40)$$

因为 $\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x})$ 是有界的, 那么

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} + \eta_k \Delta \mathbf{u} - \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_x \mathbf{x}\|_{L_2}^2 = 0 \quad (41)$$

若定义 $\mathbf{u}_* = \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_x \mathbf{x}$, 对于足够大的 k , 则有

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \eta_k \Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_* \quad (42)$$

同理

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \eta_k \Delta \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_* \quad (43)$$

式(42)和式(43)表明, 式(29)步长更新准则使对偶变量 $\mathbf{u}_{k+1} \rightarrow \mathbf{u}_*$, $\mathbf{v}_{k+1} \rightarrow \mathbf{v}_*$ 收敛. 证毕.

3 实验结果及分析

测试所用计算机配置: Genuine Intel (R) 2CPUs T2300 @ 1.66GHz, 1.66GB 内存, 软件环境为 Matlab R2009a, Windows 7 操作系统. 为客观评价图像恢复效果, 采用四种定量指标^[3]: 相对误差 RE、平均绝对误差 MAE、峰值信噪比 PSNR 和结构相似测度 SSIM.

实验 1 不同算法恢复合成图像

选用结构简单合成图像^[7]如图 1(a)和 2(a), 图 1(f)和 2(f)为对应三维表面. 用本文算法, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1$; 快速傅里叶变换算法^[3], $\mathbf{D} = \mathbf{I}_n$ (算法 1) 和 $\mathbf{D} = \mathbf{D}_2$ (算法 2) 进行实验. 一、二阶算子 \mathbf{D}_1 和 \mathbf{D}_2 表达式为

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{D}_{1,m} \\ \mathbf{D}_{1,n} \otimes \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{D}_{2,m} \\ \mathbf{D}_{2,n} \otimes \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad (44)$$

式中, \otimes 表示 Kronecker 积, \mathbf{I}_n 为单位矩阵, $\mathbf{D}_{1,n}$ 和 $\mathbf{D}_{2,n}$ 分别为

$$\mathbf{D}_{1,n} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 1 \\ 1 & & & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$\mathbf{D}_{2,n} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

用 $\sigma = 3$ 对图 1(a)和图 2(a)进行降质, 如图 1(b)、2(b)所示, 图像比较模糊, 图 1、2 中 (b) ~ (e) 中为不同算法恢复图像, 图 1、2 中 (g) ~ (j) 为恢复图像的三维表面, 表 1 为不同算法恢复定量评价指标.

图 1(c)和图 2(c)比较模糊, 表明算法 1 的正则项仅满足拟合要求, 没有体现图像的边缘特征. 图 1(d)和图 2(d)模糊程度与图 1(c)和图 2(c)相近, 说明二阶可微的正则项决定解的特性, 因此获得的图像比较平滑. 此外, 算法 1 和 2 都在平稳区域产生伪边缘. 图 1(e)和图 2(e)恢复的边缘和平稳区域比较理想, 表明本文算法能准确体现图像的特征. 从三维表面来看, 图 1(g)和图 2(g)比较光滑, 严重偏离原始图像三维表面, 说明边缘模糊严重. 算法 1 和算法 2 恢复的三维表面有很多尖点, 如图 1 的 (h)、(i) 和图 2 的 (h)、(i), 而这些尖点对应图像的边缘, 说明算法很难恢复图像的边缘; 同时, 平稳区域三维表面严重偏离原始三维表面, 说明图像恢复效果不理想. 图 1(j)和图 2(j)恢复三维表面与图 1

(f)和图 2(f)原始三维表面非常相似,说明本文算法能准确体现图像的特征.对图 1(a)和图 2(a)进行下采

样,获得 128×128 图像,用 $\sigma = 1.5$ 对图像进行降质,不同算法定量评价指标如表 2.

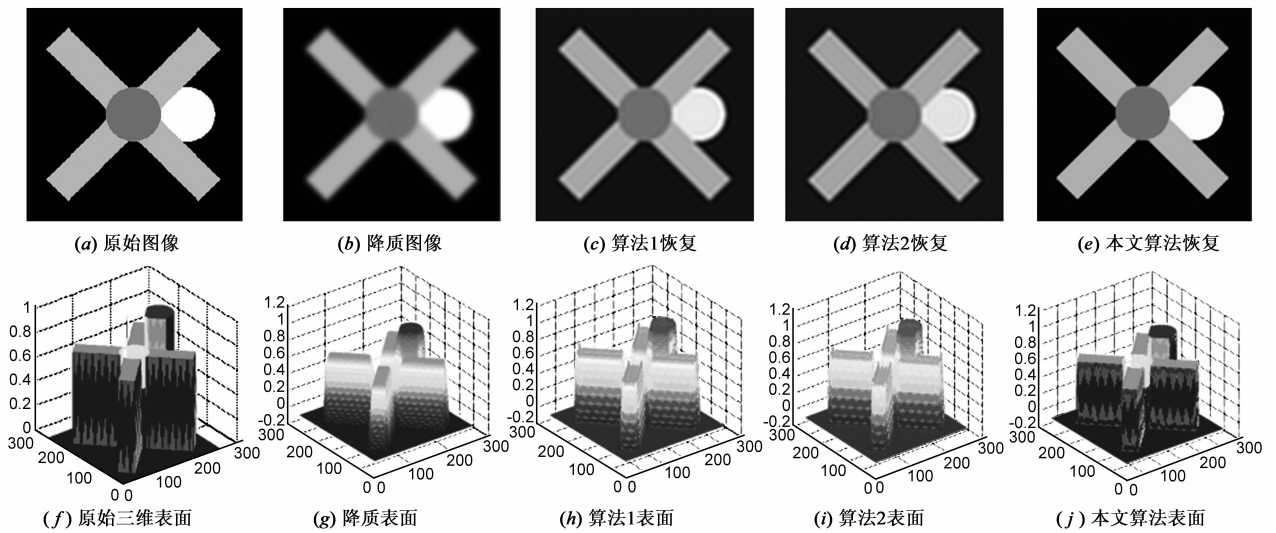


图1 不同算法恢复性能对比

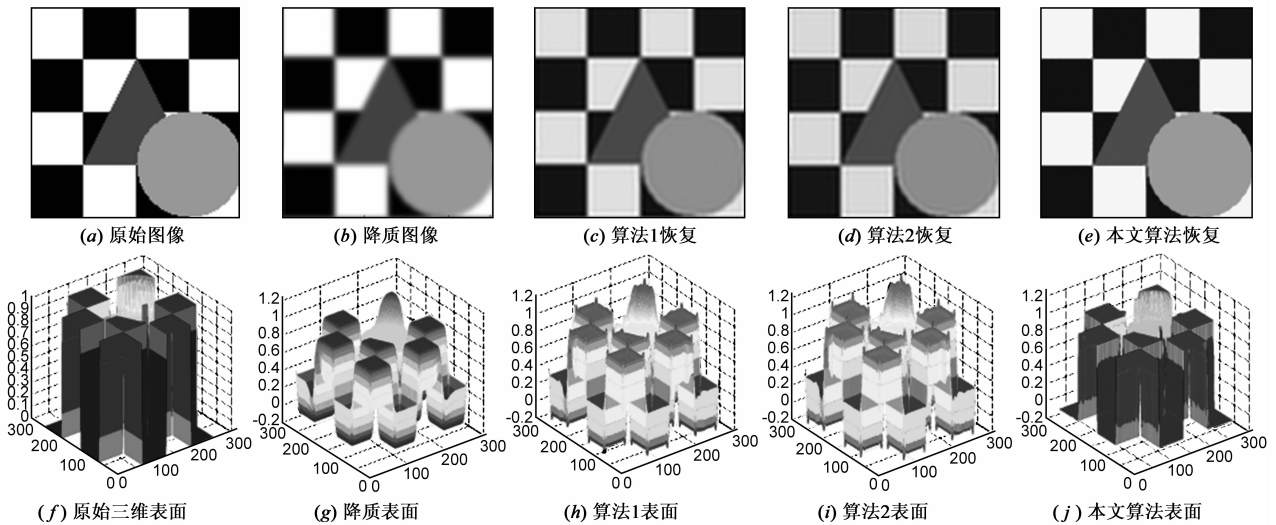


图2 不同算法恢复性能对比

表 1 不同算法恢复性能比较 (256 × 256), 图 1 和 图 2

原始图像	指标	模糊图像, 图(b)	算法 1, 图(c)	算法 2, 图(d)	本文算法, 图(e)
图 1(a)	RE	0.194	0.156	0.149	0.066
	MAE	0.030	0.025	0.024	0.005
	PSNR	21.76	23.53	23.92	31.02
	SSIM	0.809	0.820	0.800	0.983
图 2(a)	RE	0.168	0.125	0.116	0.033
	MAE	0.055	0.036	0.031	0.016
	PSNR	18.83	23.81	24.53	33.53
	SSIM	0.796	0.807	0.786	0.988

表 2 不同算法恢复性能比较 (128 × 128)

原始图像	指标	模糊图像	算法 1	算法 2	本文算法
图 1(a) 下采样	RE	0.192	0.151	0.154	0.052
	MAE	0.0296	0.0257	0.0259	0.005
	PSNR	21.94	23.74	23.56	33.01
	SSIM	0.812	0.891	0.870	0.989
图 2(a) 下采样	RE	0.188	0.145	0.148	0.035
	MAE	0.060	0.041	0.039	0.003
	PSNR	17.80	21.40	21.19	32.66
	SSIM	0.810	0.879	0.854	0.992

从表 1 和表 2 定量评价指标来看,算法 1 的 RE 和 MAE 小于算法 2, PSNR 和 SSIM 高于算法 2, 说明算法 1 的恢复效果好于算法 2, 而本文算法的 RE 和 MAE 最小, PSNR 和 SSIM 最大, 说明本文算法恢复性能好于其他两种算法.

实验 2 不同算法恢复真实图像

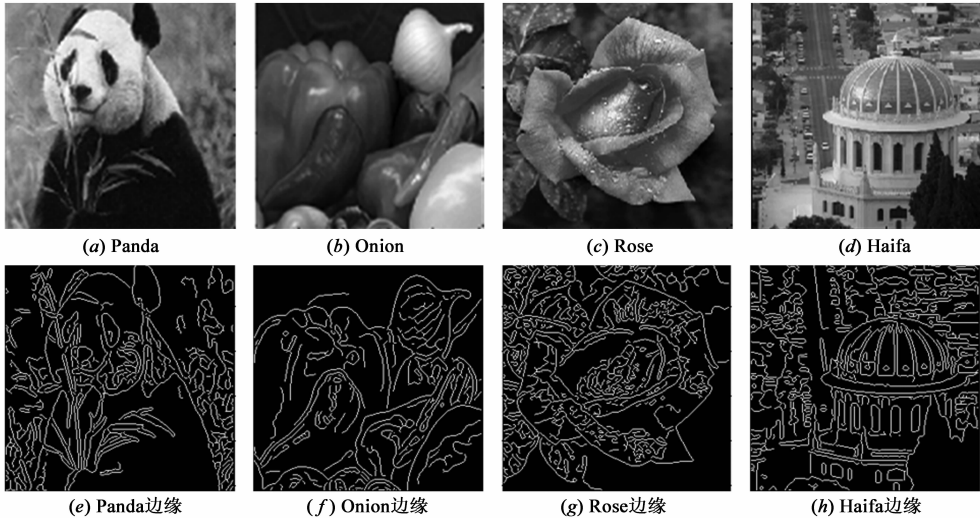


图3 原始图像及边缘

选用拟牛顿算法^[16], 该算法具有二阶收敛速度, 但随着图像规模增大, 导致构造结构化海森矩阵变得困难, 文献[4]算法, 该算法具有较快收敛速度; 交替投影算法^[5], 该算法容易在平稳区域产生阶梯效应; 与本文算法进行对比. 图 4~7 为不同算法恢复性能对比.

从定性结果来看, 对于 Panda 图像, 降质图像边缘丢失严重, 如图 4(f). 在 Panda 的“眼睛”上方, 文献[16]方法使得边缘丢失, 这是由于结构化海森矩阵不当所

致, 如图 4(g). 文献[4]方法在 Panda 左眼的上方产生一条虚假边缘, 这是由于该算法产生阶梯效应所致, 如图 4(h). 用文献[5]方法, Panda 右眼的上方和外侧边缘丢失, 这是由于拟合项不当所致, 如图 4(i). 从图 4(j) 与图 3(e) 对比来看, 本文算法恢复 Panda 的“眼睛”几乎与原始图像边缘一致, 这是由于本文算法不仅考虑原始图像, 而且考虑对偶图像.

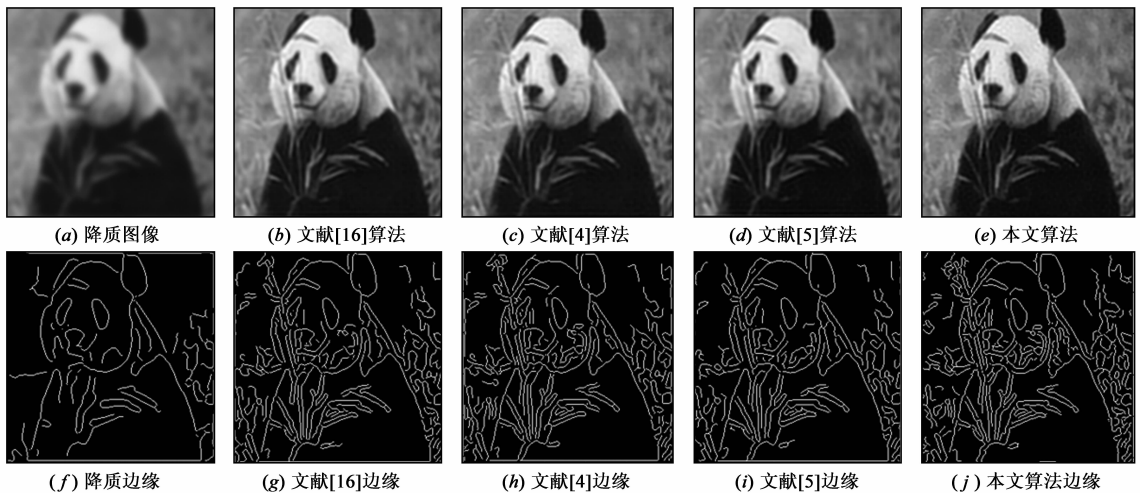


图4 不同算法恢复Panda图像(256×256)及边缘

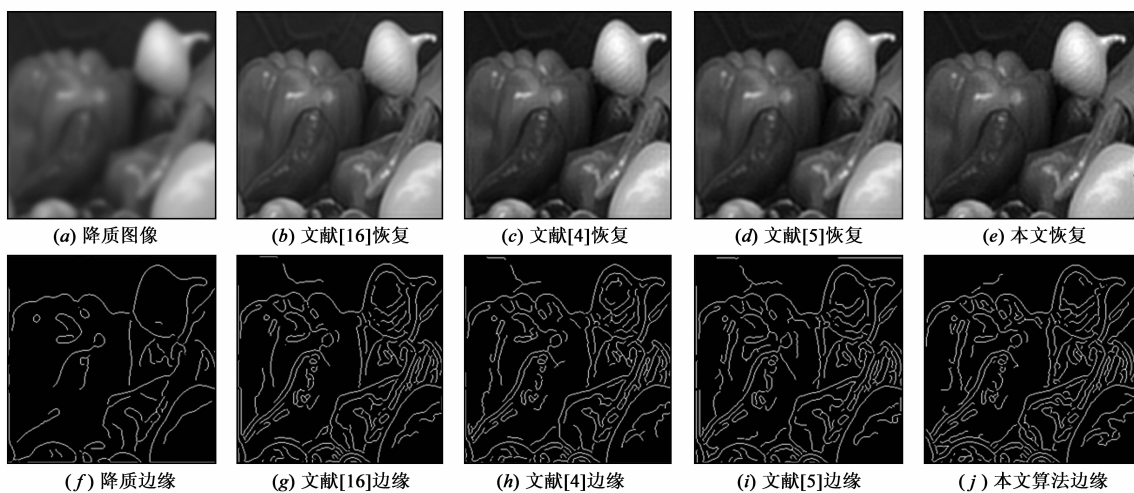


图5 不同算法恢复Onion图像(256×256)及边缘

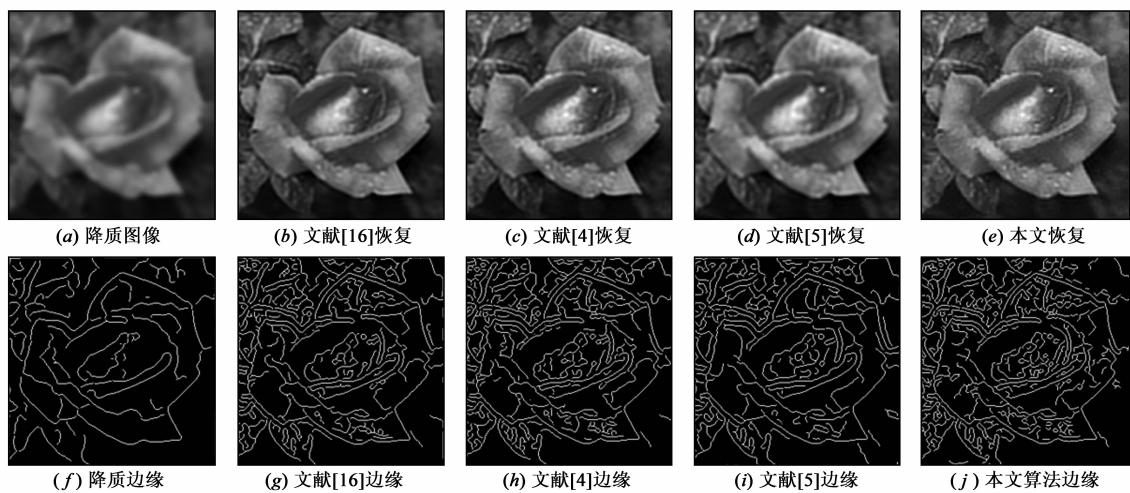


图6 不同算法恢复Rose图像(256×256)及边缘

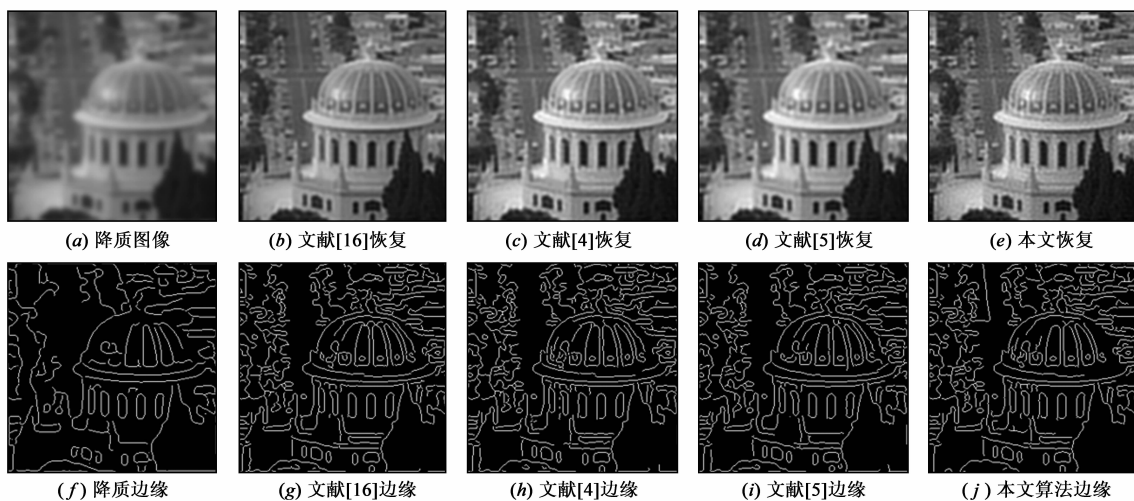


图7 不同算法恢复Haifa图像(256×256)及边缘

对于 Onion 图像,文献[16]方法在图像左上方产生一条虚假边缘且部分边缘丢失,如图 5(g).用文献[4]方法也产生虚假边缘,如图 5(h),这是由于阶梯效应所致.文献[5]方法在左上方产生虚假边缘,如图 5(i).从图 5(j)与图 3(f)对比来看,本文算法恢复图像的边缘与原始图像边缘几乎一致,说明本文算法能准确体现图像的特征.

对于 Rose 图像,文献[17]方法在图像右下方产生虚假边缘,如图 6(g),文献[4]方法在图像右下方也产生虚假边缘,如图 6(h),说明算法产生阶梯效应.文献[5]方法产生的虚假边缘比文献[16]和文献[4]严重,如图 6(i).从图 6(j)与图 3(g)对比来看,本文算法恢复的边缘与原始图像边缘几乎一致.

对于 Haifa 图像,由图 3(h)可知,图像中的“道路”分界线边缘清晰可见,但文献[16]、文献[4]、文献[5]方法都没有恢复出该分界线,如图 7(g)、图 7(h)、图 7(i)所示.而本文算法恢复出该分界线,如图 7(j),说明本文算法优于其他三种方法.

图 3 下采样获得 128×128 图像,用 $\sigma = 3$ 和 $\sigma = 1.5$ 对图像进行退化,然后用不同算法对图像恢复,表 3 和表 4 为定量评价指标,表 5 和表 6 为不同算法执行时间.

表 3 不同算法恢复性能比较(256 × 256)

原始图像	指标	模糊图像(a)	文献[16]算法图(b)	文献[4]算法图(c)	文献[5]算法图(d)	本文算法图(e)
Panda	RE	0.123	0.082	0.082	0.086	0.074
	MAE	0.040	0.026	0.027	0.028	0.026
	PSNR	24.58	28.19	28.10	27.73	28.46
	SSIM	0.614	0.748	0.739	0.725	0.746
Onion	RE	0.093	0.050	0.049	0.053	0.0397
	MAE	0.021	0.0097	0.0107	0.0113	0.0104
	PSNR	28.80	35.63	35.34	34.85	35.66
	SSIM	0.853	0.946	0.935	0.929	0.934
Rose	RE	0.156	0.105	0.105	0.115	0.099
	MAE	0.042	0.026	0.027	0.029	0.026
	PSNR	24.13	27.58	27.54	26.75	27.94
	SSIM	0.622	0.779	0.772	0.739	0.781
Haifa	RE	0.146	0.099	0.010	0.104	0.095
	MAE	0.052	0.034	0.034	0.035	0.033
	PSNR	22.42	25.82	25.79	25.43	26.15
	SSIM	0.514	0.716	0.710	0.689	0.729

表 4 不同算法恢复性能比较(128 × 128)

原始图像	指标	模糊图像	文献[16]算法	文献[4]算法	文献[5]算法	本文算法
Panda	RE	0.103	0.050	0.052	0.057	0.044
	MAE	0.031	0.014	0.017	0.018	0.014
	PSNR	26.21	33.05	32.36	31.69	32.79
	SSIM	0.787	0.947	0.924	0.918	0.935
Onion	RE	0.089	0.042	0.045	0.048	0.032
	MAE	0.0193	0.0080	0.0111	0.0112	0.0089
	PSNR	29.46	37.44	35.93	35.66	36.92
	SSIM	0.875	0.977	0.950	0.951	0.964
Rose	RE	0.132	0.068	0.071	0.081	0.065
	MAE	0.035	0.018	0.020	0.022	0.018
	PSNR	25.58	31.33	31.01	29.79	31.45
	SSIM	0.756	0.929	0.918	0.898	0.924
Haifa	RE	0.123	0.063	0.065	0.070	0.061
	MAE	0.043	0.022	0.023	0.025	0.022
	PSNR	23.75	29.61	29.36	28.73	29.61
	SSIM	0.662	0.907	0.896	0.881	0.897

表 5 不同算法执行时间对比(256 × 256)

处理时间	Panda	Onion	Rose	Haifa
文献[16]算法	6.918	4.872	17.07	4.240
文献[4]算法	51.18	50.26	49.21	47.84
文献[5]算法	126.48	125.54	123.67	114.11
本文算法	29.19	24.61	29.35	32.14

表 6 不同算法执行时间对比(128 × 128)

处理时间	Panda	Onion	Rose	Haifa
文献[16]算法	1.394	0.670	3.176	0.787
文献[4]算法	12.72	13.12	12.29	13.30
文献[5]算法	27.98	28.99	27.79	27.50
本文算法	5.704	4.739	5.702	5.823

从定量结果来看,表 3 中,对于 Panda 图像,文献[16]获得 SSIM 最大,本文方法获得 PSNR 最高,RE 和 MAE 最小,总体说来,本文方法恢复效果比较理想.对于 Onion 图像,文献[16]方法获得 MAE 最小,SSIM 最大,而本文方法获得 PSNR 最高,RE 最小.对于 Rose 和 Haifa 图像,本文方法获得 SSIM 和 PSNR 最高,RE 和 MAE 最小,说明恢复效果好.文献[5]获得 PSNR 和 SSIM 最低,RE 和 MAE 最大,说明恢复效果最差.

表4中,对于 Panda 图像,文献[16]获得 SSIM 和 PSNR 最高,本文方法获得 RE 和 MAE 最小.对于 Onion 图像,文献[16]获得 MAE 最小,SSIM 和 PSNR 最大,本文方法获得 RE 最小.对于 Rose 和 Haifa 图像,本文方法获得 PSNR 最高,RE 和 MAE 最小,文献[16]获得 SSIM 最大.文献[5]获得 PSNR 和 SSIM 最低,RE 和 MAE 最大,说明图像恢复质量最差.

由表5和表6可知,文献[5]算法执行时间最长,本文算法执行时间比文献[4]时间短,文献[16]算法执行时间最短,但本文算法同时计算三个变量,而文献[16]算法只计算一个变量.

4 结论

本文首先证明正则项一、二阶导数的幅值有界,利用对偶变换,将原始模型求解转化为极小-极大值问题,根据 KKT 条件,提出原始-对偶变量不同步长搜索策略的牛顿迭代算法,并证明算法的收敛性.最后利用模拟与真实图像进行实验,结果表明,本文算法恢复的图像,视觉效果明显得到改善,取得较高的 PSNR 和 SSIM,较低的 RE 和 MAE,较快的计算速度.

致谢 本文研究是通讯作者在美国进行访问成果之一,在一年多的访学过程中,得到斯坦福大学 Charles K. Chui 教授、密苏里大学 Wenjie He 教授以及华盛顿大学 Carl Bender 教授的指导和帮助,在此表示感谢.

参考文献

- [1] 焦李成,杨淑媛,刘芳,等.压缩感知回顾与展望[J].电子学报,2011,20(7):1651-1662.
Jiao Li-cheng, Yang Shu-yuan, Liu Fang, et al. Development and prospect of compressive sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 20(7): 1651-1662. (in Chinese)
- [2] Chen Xue Mei, Wang Hai Chao, Wang Rong Rong. A null space analysis of the l_1 -synthesis method in dictionary-based compressed sensing[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2014, 37(3): 492-515.
- [3] 李旭超.能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用[M].北京:电子工业出版社,2014.1-189.
- [4] Beck Amir, Teboulle Marc. A fast iterative shrinkage-thresholding for linear inverse problems[J]. SIAM Journal on Imaging Science, 2009, 2(1): 183-202.
- [5] Bonettini S, Ruggiero V. An alternating extragradient method for total variation based image restoration from Poisson data [J]. Inverse Problems, 2011, 27(9): 1-28.
- [6] Rudin Leonid I, Osher Stanley, Fatemi Emad. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physical D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1): 259-268.
- [7] Vogel Curtis R. Computational Methods for Inverse Problems

- [M]. Philadelphia, Pennsylvania, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. 1-183.
- [8] 郑红,李振,黄盈.一种基于拟牛顿法的 CS 投影矩阵优化算法[J].电子学报,2014,42(10):1977-1982.
Zheng Hong, Li Zhen, Huang Ying. An optimization method for CS projection matrix based on quasi-Newton method[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(10): 1977-1982. (in Chinese)
- [9] Amir Beck, Marc Teboulle. A fast dual proximal gradient algorithm for convex minimization and applications[J]. Operations Research Letters, 2014, 42(1): 1-6.
- [10] Bioucas-Dias J M, Figueiredo M A T. A new TwIST: two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(12): 2992-3004.
- [11] Duran Joan, Coll Bartomeu, Sbert Catalina. Chambolle's projection algorithm for total variation denoising[J]. Image Processing on Line, 2013, (3): 301-321.
- [12] Zhu Mingqiang, Stephen J Wright, Tony F Chan. Duality-based algorithms for total variation regularized image restoration[J]. Computational Optimization and Applications, 2010, 47(3): 377-400.
- [13] Antonin Chambolle, Thomas Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2011, 40(1): 120-145.
- [14] Goldstein Tom, Esser Ernie, Baraniuk Richard. Adaptive Primal-dual Hybrid Gradient Methods for Saddle-point Problems, 2013 [OL]. <http://arxiv.org/abs/1305.0546>, 2014-10-07.
- [15] Silvia Bonettini, Valeria Ruggiero. On the convergence of primal-dual hybrid gradient algorithms for total variation image restoration[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2012, 44(3): 236-253.
- [16] Landi Germana, Piccolomini Elena Loli. NPTool: a MATLAB software for nonnegative image restoration with Newton projection methods[J]. Numerical Algorithms, 2013, 62(3): 487-504.
- [17] 解凯,张芬.基于过完备表示的图像去噪算法[J].电子学报,2013,41(10):1912-1916.
Xie Kai, Zhang Fen. Overcomplete representation base image denoising algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(10): 1912-1916. (in Chinese)
- [18] Aubert Gilles, Kornprobst Pierre. Mathematical Problems in Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations[M]. New York, USA: Springer Verlag, 2006. 1-371.
- [19] R I Hartley, A Zisserman. Multiple View Geometry in Computer Vision [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[20] Luenberger David G, Ye Yinyu. Linear and Nonlinear Programming[M]. New York, USA: Springer Science, Business Media, LLC, 2007. 1 – 546.

[21] Lee Katrina Palmer, Nagy James G, Perrone Lisa. Iterative methods for image deblurring: a MATLAB object-oriented approach[J]. Numerical Algorithms, 2004, 36(1): 73 – 93.

作者简介



李旭超 男, 1974 年 12 月出生于内蒙古赤峰市. 现为赤峰学院计算机与信息工程学院教师, 从事调和分析方面的研究工作.

E-mail: bsx7096@sohu.com



宋博 男, 1979 年 12 月出生于江苏省徐州市. 现为江苏师范大学电气工程及自动化学院教师, 从事随机控制理论、时滞系统方面的研究工作.

E-mail: songboxzhou@sohu.com